Laurent 級數

林延輯

台灣師範大學數學系

April 26, 2016

Theorem

設冪級數 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 的收斂半徑為 R，其中 $0 < R \leq \infty$。

設 C 是在收斂圓 $|z - z_0| = R$ 內部的任一條有限長的路徑，並且函數 $g(z)$ 在 C 上為連續函數，則

$$\int_C g(z) \cdot S(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) \cdot (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

也就是說，每一項同時乘上 $g(z)$ 後，級數和的積分會等於積分的級數和。

Theorem

在收斂開圓盤 $|z-z_0|<R$ 中，冪級數 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 可以逐項微分：

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Proof

取 C 是在收斂開圓盤中、繞 z 正向一圈的簡單封閉路徑，並令

$$g(s)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{(s-z)^2}.$$

代入上面的定理 (1) 式，由柯西積分公式可得

$$S'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{S(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s\right).$$

Proof.

$$S'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s \right).$$

一樣根據柯西積分公式，對任意的非負整數 n，設 $h(s) = (s-z_0)^n$，則

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s = h'(z) = n\,(z-z_0)^{n-1}.$$

代回上式，即得：

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

證畢。 □

Theorem

設冪級數 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的收斂半徑為 R，其中 $0<R\leq\infty$。
設 C 是在收斂圓 $|z-z_0|=R$ 內部的任一條有限長的路徑，並且函數 $g(z)$ 在 C 上為連續函數，則

$$\int_C g(z)\cdot S(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_C g(z)\cdot(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Theorem (解析函數與其級數表示式的唯一性)

如果級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{2}$$

在某個圓 $|z-z_0|=R$ 的內部區域逐點收斂至函數 $f(z)$，則 $f(z)$ 在開圓盤 $|z-z_0|<R$ 中是解析的，且 (3) 式就是 $f(z)$ 在該開圓盤中的泰勒級數展開式。

冪級數的乘法與除法

Example

設以下的兩個冪級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

在同一個圓 $|z - z_0| = R$ 的內部區域皆收斂，則 $f(z), g(z)$ 在開圓盤 $|z - z_0| < R$ 中都是解析函數；當然它們的乘積 $f(z) \cdot g(z)$ 也是。所以在同一個開圓盤中，$f(z) \cdot g(z)$ 也有自己的 Taylor 級數展開式：

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

那麼這些係數 c_n 要如何求出呢？

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)\, g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_C f(z)\, (z - z_0)^{k-n-1}\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_k \int_C (z - z_0)^{j+k-n-1}\, \mathrm{d}z = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}.
\end{aligned}$$

這就是 Cauchy product (又稱 convolution product) 公式！

柯西乘積公式

Example

試求函數 $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$ 的 Maclaurin 級數，並指出其收斂半徑。

Solution

函數 $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots$ 的收斂圓是 $|z|=1$，而 e^z 是整函數，所以 $f(z)$ 的 Maclaurin 級數的收斂半徑是 1。

$$
\begin{aligned}
\frac{e^z}{1+z} &= \left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\cdots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right) \\
&= 1+\left(-1+1\right)z+\left(1-1+\frac{1}{2}\right)z^2+\left(-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)z^3+\cdots \\
&= 1+0\cdot z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots.
\end{aligned}
$$

Example

試求 $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ 的 Maclaurin 級數。

Solution

法一：用 Cauchy product:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right)\left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right) \\
&= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots .
\end{aligned}
$$

法二：微分！

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{1-z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right) \\
&= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Example

試求 $f(z) = \tan z$ 的 Maclaurin 級數，並指出其收斂半徑。

Solution

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots}.$$

使用升冪寫法的長除法，可以得到：

$$f(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots .$$

因為分母 $\cos z$ 最靠近原點的零點是 $z = \pm\pi/2$，所以上述級數的收斂半徑是 $|\pm\pi/2| = \pi/2$。

Question: $\tan z$ 的 Maclaurin 級數中，z^7 項的係數為多少？
(Answer: $17/315$.)

由逐項積分求出級數表示法

Example

試求 $f(z) = \arctan z$ (取分支 $f(0) = 0$) 的 Maclaurin 級數。

Solution

因為 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\arctan z) = \dfrac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots \ (|z| < 1)$，故當 $|z| < 1$ 時，

$$
\begin{aligned}
f(z) = \arctan z &= \int_0^z \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^z \left(1 - s^2 + s^4 - s^6 + \cdots\right)\mathrm{d}s \\
&= z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.
\end{aligned}
$$

合成函數的級數表示法

Example

試求整函數 $f(z) = \sin(\sin z)$ 的 Maclaurin 級數。

Solution

$$\sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \frac{w^7}{5040} + \cdots, \qquad |w| < \infty.$$

將上面的 w 用 $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots$ 代入，可得：

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(\sin z) \\ &= \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) - \frac{1}{6}\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right)^3 + \cdots \\ &= z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - \frac{8}{315}z^7 + \cdots. \end{aligned}$$

反函數的級數表示法

Example

已知 $w = f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$ 在原點 $z = 0$ 附近有反函數 $z = g(w) = \arcsin w$。試求 $g(w)$ 的 Maclaurin 級數。

Solution

設反函數 $g(w)$ 的 Maclaurin 級數為

$$z = g(w) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k.$$

由於 $g\big(f(z)\big) = z$，由級數的唯一性可知

$$z = b_1\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right) + b_2\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\right)^2 + \cdots$$

遞迴解出 $$z = w + \frac{1}{6}w^3 + \frac{3}{40}w^5 + \cdots.$$

幾個常用的冪級數

1. $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots,\ |z|<1$
2. $\dfrac{1}{(1-z)^k}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{n+k-1} z^n,\ |z|<1, k\in\mathbb{N}$
3. $(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots,$
   $|z|<1,\ \alpha\in\mathbb{R}$
4. $\sqrt{1+z}=1+\dfrac{1}{2}z-\dfrac{1}{8}z^2+\dfrac{1}{16}z^3-\dfrac{5}{128}z^4+\cdots,\ |z|<1$

5. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots, \; |z| < \infty$

6. $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots,$
$|z| < 1$

7. $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots, \; |z| < \infty$

8. $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots, \; |z| < \infty$

9. $\operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} z^{2k+1} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right),$
$|z| < 1$

泰勒定理

Theorem (Taylor)

設函數 f 在開圓盤 $|z - z_0| < R_0$ 中是解析的 $(z_0 \in \mathbb{C}, 0 < R_0 \leq +\infty)$。則在此開圓盤中，$f$ 可以表成以下的冪級數：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0), \tag{3}$$

其中的係數 a_n 是 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$。

也就是說，(3) 式右邊的冪級數在開圓盤 $B(z_0, R_0)$ 中收斂到 $f(z)$。

Definition

從 Taylor 定理的假設，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ 稱為解析函數 $f(z)$ 在 z_0 處的泰勒級數 Taylor series。

Laurent 定理

Theorem (Laurent)

設 $z_0 \in \mathbb{C}$，$0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$，且函數 f 在環形域 *(annular domain)* $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 中是解析函數。設 C 是任一條在此環形域中、正向繞著 z_0 一圈的簡單封閉路徑。則在此環形域中的任意一點 z，$f(z)$ 可用以下的級數表示：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2, \tag{4}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad b_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad \forall\ n. \tag{5}$$

Theorem (Laurent)

設 $z_0 \in \mathbb{C}$，$0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$，且函數 f 在環形域 (*annular domain*) $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 中是解析函數。設 C 是任一條在此環形域中、正向繞著 z_0 一圈的簡單封閉路徑。則在此環形域中的任意一點 z，$f(z)$ 可用以下的級數表示：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad b_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad \forall\ n. \tag{5}$$

註：(4) 式可合寫成：$f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$，其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Theorem (Laurent)

設 $z_0 \in \mathbb{C}$，$0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$，且函數 f 在環形域 *(annular domain)* $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 中是解析函數。設 C 是任一條在此環形域中、正向繞著 z_0 一圈的簡單封閉路徑。則在此環形域中的任意一點 z，$f(z)$ 可用以下的級數表示：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2, \tag{4}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, ds, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}} \, ds, \quad \forall\ n. \tag{5}$$

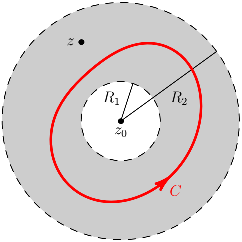
(4) 式稱為 f 在環形域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$、以 z_0 為中心的 Laurent 級數。

Theorem (Laurent)

設 $z_0 \in \mathbb{C}$，$0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$，且函數 f 在環形域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 中是解析函數。設 C 是任一條在此環形域中、正向繞著 z_0 一圈的簡單封閉路徑。則在此環形域中的任意一點 z，

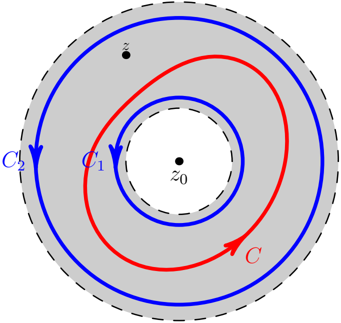
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\, ds, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}}\, ds, \quad \forall\ n. \tag{5}$$



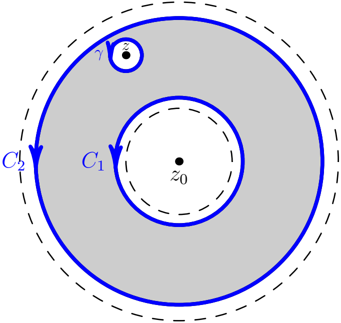
Proof

設兩正向圓路徑 $C_1 : |s - z_0| = r_1, C_2 : |s - z_0| = r_2$，使得 C 落在 C_1, C_2 所夾的環形區域之中 $(R_1 < r_1 < r_2 < R_2)$。



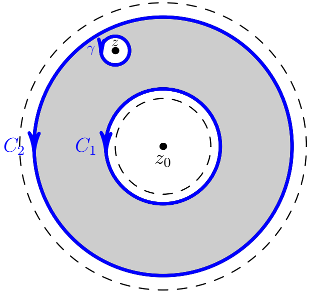
Proof

以 z 為圓心，畫一個正向小圓路徑 γ 介於 C_1, C_2 之間。根據路徑變形原則：



$$\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s - \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s - \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Proof



$$\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s - \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s - \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = 0.$$

根據柯西積分公式，$f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s$，所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\,\mathrm{d}s. \tag{6}$$

Proof

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\,ds. \tag{6}$$

我們先處理 (6) 式右邊的第一個積分。當 $s \in C_2$ 時，
$|s - z_0| = r_2 > |z - z_0|$。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s-z} &= \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)} \\
&= \frac{1}{s-z_0}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n + \frac{1}{s-z}\cdot\frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0)^N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{s-z}\,ds &= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds\right)(z-z_0)^n \\
&\quad + \frac{(z-z_0)^N}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^N}\,ds.
\end{aligned}$$

Proof

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}s \right) (z-z_0)^n + \frac{(z-z_0)^N}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^N}\,\mathrm{d}s.$$

$$\left| \frac{(z-z_0)^N}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)\,\mathrm{d}s}{(s-z)(s-z_0)^N} \right| \le \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M}{(r_2-r)r_2^N} \cdot 2\pi r_2 \to 0$$

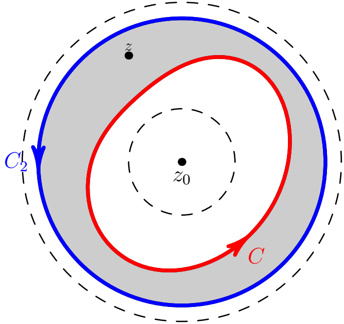
as $N \to \infty$ (Here, $r = |z-z_0|$, $M = \sup\{|f(s)| \mid s \in C_2\}$.)

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}s \right) (z-z_0)^n.$$

Proof

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds\right)(z-z_0)^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds$$



Proof

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\,\mathrm{d}s. \tag{6}$$

我們再來處理 (6) 式右邊的第二個積分。當 $s \in C_1$ 時，
$|s-z_0| = r_1 < |z-z_0|$。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-s} &= \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)} \\
&= \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^n + \frac{1}{z-s} \cdot \frac{(s-z_0)^N}{(z-z_0)^N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{N-1} &\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n}}\,\mathrm{d}s \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&+ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^N} \int_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^N}{z-s}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Proof

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n}}\,\mathrm{d}s \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^N} \int_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^N}{z-s}\,\mathrm{d}s.$$

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^N} \int_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^N}{z-s}\,\mathrm{d}s \right| \le \frac{1}{2\pi r^N} \frac{M' \, r_1^N}{r-r_1} \cdot 2\pi r_1 \to 0$$

as $N \to \infty$ (Here $r = |z-z_0|$ and $M' = \sup\{|f(s)| \mid s \in C_1\}$.)

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n}}\,\mathrm{d}s \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

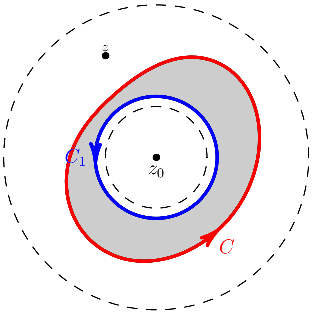
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}s \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n}}$$

Proof.

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{z-s}\, \mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\, \mathrm{d}s \right) \frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\, \mathrm{d}s.$$

□



Theorem (Laurent)

設 $z_0 \in \mathbb{C}$，$0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$，且函數 f 在環形域 *(annular domain)* $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 中是解析函數。設 C 是任一條在此環形域中、正向繞著 z_0 一圈的簡單封閉路徑。則在此環形域中的任意一點 z，$f(z)$ 可用以下的級數表示：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad b_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad \forall\ n. \tag{5}$$

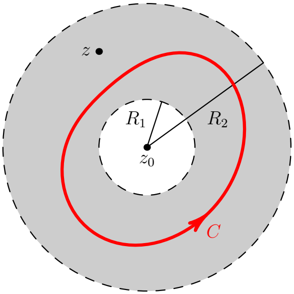
Remark: 這裡的係數 a_n, b_n 不能像在 Taylor 定理一樣寫成 f 在 z_0 處的高階導函數值，因為通常 f 在 z_0 處沒有定義。

Theorem

設函數 $f(z)$ 在環狀區域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ (其中 $0 < R_1 < R_2 \leq +\infty$) 是解析的，則 $f(z)$ 在此區域的 *Laurent* 級數：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}s,$$

在此環狀區域中是連續函數；在此環狀區域中的任一個緊緻子集上均勻收斂。在此環狀區域中，$f(z)$ 的 *Laurent* 級數是唯一的。



Laurent 級數的例子

Example

試求函數 $f(z) = e^{1/z}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 的 Laurent 級數。

Solution

從下列已知的級數開始：

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad |z| < \infty. \tag{7}$$

將 (7) 式中的 z 以 $1/z$ 代入，即得：

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots, \quad 0 < |z| < \infty. \tag{8}$$

Example

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots, \quad 0 < |z| < \infty. \tag{8}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\, ds, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}}\, ds, \quad \forall\, n. \tag{5}$$

如果 C 為繞原點正向一圈的簡單封閉路徑，則其中的 b_1 可表成：

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-1+1}}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(s)\, ds$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_C e^{1/z}\, dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Example

設 $f(z)=\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})^2}$。若 C 為繞點 $z=\mathrm{i}$ 正向一圈的簡單封閉路徑，且 n 為整數，試求

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Solution

$f(z)$ 已經是 Laurent 級數的形式：當 $0<|z-\mathrm{i}|<\infty$ 時，

$$f(z)=\cdots+\frac{0}{(z-\mathrm{i})^3}+\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}+\frac{0}{z-\mathrm{i}}+0+0(z-\mathrm{i})+0(z-\mathrm{i})^2+\cdots.$$

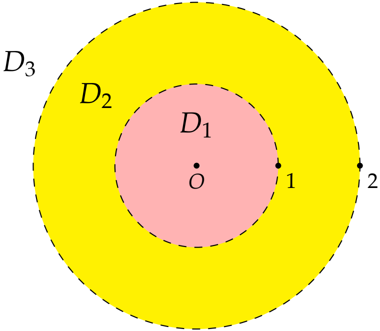
$$\int_C \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot c_n=\begin{cases}0 & \text{if } n\neq -2\\ 2\pi\mathrm{i} & \text{if } n=-2.\end{cases}$$

在不同環狀區域的 Laurent 級數

Example

函數 $f(z) = \dfrac{-1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$ 有兩個不能定義的點 $z = 1, 2$。試於下列不同的環狀區域中寫出 $f(z)$ 的 Laurent 級數：

$$D_1 : |z| < 1; \qquad D_2 : 1 < |z| < 2; \qquad D_3 : 2 < |z| < \infty.$$



Solution

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

- $D_1 : |z| < 1$：因為 $|z| < 1 < 2$，所以

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n; \qquad \frac{-1}{z-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 - \cdots.$$

(事實上，這是 Maclaurin 級數。)

Solution

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

- $D_2 : 1 < |z| < 2 :$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}; \quad \frac{-1}{z-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \\ &= \cdots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z + \frac{1}{8} z^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Solution

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

- $D_3 : 2 < |z| < \infty$：因為 $|z| > 2 > 1$，所以

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}};$$

$$\frac{-1}{z-2} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2^{n-1}\right) \frac{1}{z^n}$$

$$= \cdots - \frac{7}{z^4} - \frac{3}{z^3} - \frac{1}{z^2}.$$

Solution

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

- $f(z) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 - \cdots \quad (|z| < 1);$
- $f(z) = \cdots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \cdots \quad (1 < |z| < 2);$
- $f(z) = \cdots - \frac{7}{z^4} - \frac{3}{z^3} - \frac{1}{z^2} \quad (2 < |z| < \infty).$

同一個函數，在不同的環狀區域展開成不同的 Laurent 級數。

奇異點

Definition

設 f 為一函數，z_0 是複數平面中的一點。如果 f 在 z_0 處不解析，但在 z_0 的每一個開鄰域中都可以找到一點讓 f 在那兒解析的話，稱 z_0 是 f 的奇異點 singular point。

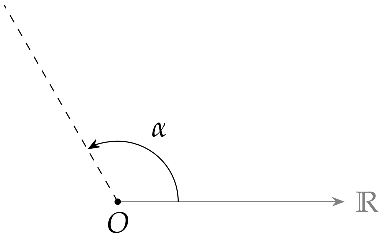
Definition

若 z_0 是 f 的奇異點，並且存在 z_0 的某一個 deleted neighborhood $B'(z_0, \delta)$ 使得 f 在其中解析的話，稱 z_0 為 f 的孤立奇異點 isolated singular point。

奇異點

Example

考慮 $f(z) = \log z$。我們取一個分支：從原點引一條射線，把它從複數平面移除，得 $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$。則整條射線 $\arg z = \alpha$ 上的點都是是 $f(z)$ 的奇異點 (但不孤立)。



奇異點

Example

考慮函數
$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}.$$

- 奇異點：$z = 0$ 以及 $z = \pm\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
- $z = \pm\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 都是孤立奇異點。
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，所以 $z = 0$ 不是孤立奇異點。

孤立奇異點

Example

$z = 0$ 是函數 $f(z) = 1/z$ 的孤立奇異點。

Example

考慮函數 $f(z) = \csc z = \dfrac{1}{\sin z}$。則 $z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 都是 f 的孤立奇異點。

Definition

對於複數平面的函數 f，如果可以找到正數 $R > 0$，使得 f 在 domain $|z| > R$ 中為解析函數，則稱無窮遠點 ∞ 為 f 的孤立奇異點。

留數

Definition

設點 z_0 為函數 f 的孤立奇異點。定義 f 在 z_0 的留數 residue 為 $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$，其中 C 是 (夠小的) 繞 z_0 正向一圈的簡單封閉路徑，記為

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

Remark. 在某個 z_0 的 deleted neighborhood 中，f 可寫成 Laurent 級數：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_3}{(z-z_0)^3} + \cdots.$$

那麼根據 Laurent 定理，f 在 z_0 的留數就是為 b_1，即 $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = b_1$。

Example

設 C 是正向一圈的圓形路徑 $|z| = 1$。試求路徑積分 $\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$ 之值。

Solution

將函數 $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 0 附近寫成 Laurent 級數：

$$\begin{aligned} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) &= z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \cdots\right) \\ &= z - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{1}{120}\frac{1}{z^3} - \cdots, \qquad 0 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

觀察此級數，可知 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{6}$。所以

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi \mathrm{i}}{3}.$$

Example

設 C 是正向一圈的圓形路徑 $|z| = 1$。試求路徑積分 $\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z$。

Solution

當 $0 < |z| < \infty$ 時，

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) &= 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^6} + \cdots .\end{aligned}$$

因此 $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = 0$，而 $\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \cdot 0 = 0$。